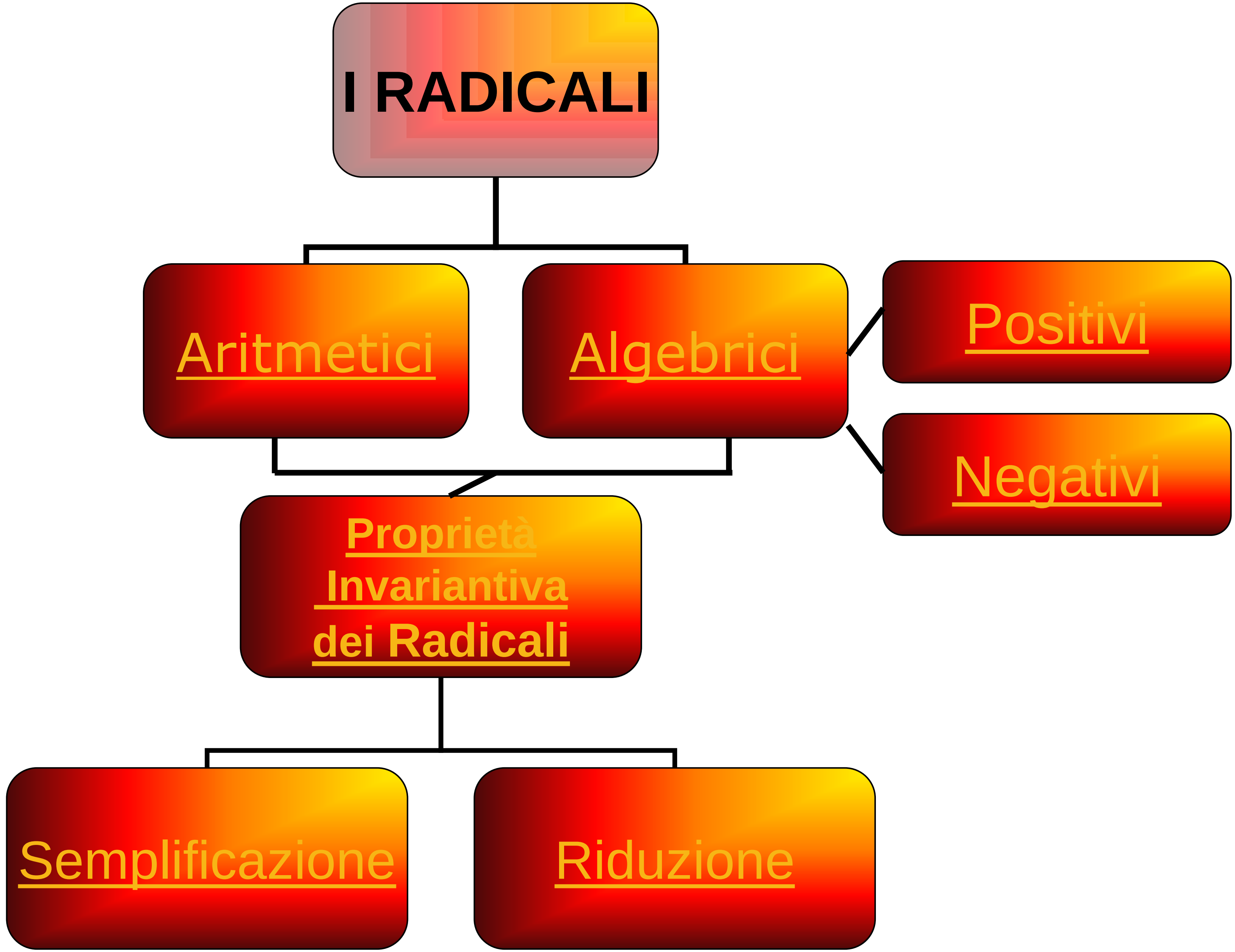
I RADICALI

L'insieme R e le radici

Semplificazioni di espressioni con i radicali


I RADICALI
Aritmetici
Algebrici
Positivi
Negativi
Proprietà Invariantiva dei Radicali
Semplificazione
Riduzione

DEFINIZIONI

- Si definisce radice n-esima aritmetica di un numero reale positivo **a**, quel numero sempre positivo la cui potenza n-esima è uguale ad **a**.

Radice n-esima di N

Indice

Esponente

$$\sqrt[n]{a^m}$$

Radicando

Non esiste radice con indice 0

- Elevando un radicale ad una potenza uguale all'indice, si ottiene solo il radicando (PROPRIETÀ FONDAMENTALE).

RADICALI ARITMETICI

- Non esiste radice con indice 0

Esempio:

$$\sqrt[0]{a} = NON\ ESISTE$$

- Se il numero dell’indice è uguale a quello dell’esponente, si semplificano sia l’indice che l’esponente e si avrà come risultato soltanto il radicando.

Esempio:

$$\sqrt[\cancel{3}]{a^{\cancel{3}}} = a$$

RADICALI ARITMETICI: i casi

$\sqrt[n]{a}$

- n è pari
  - a **>0**: $\sqrt[4]{16}$ si può fare $= \sqrt[4]{2^4} = \pm 2$
  - a<0: $\sqrt[4]{-16}$ non si può fare
- n è dispari a **∈ R**
  - $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[\cancel{3}]{(-2)^{\cancel{3}}} \Rightarrow -2$
  - $\sqrt[3]{8} = \sqrt[\cancel{3}]{(2)^{\cancel{3}}} \Rightarrow 2$

$$\sqrt{x^2 y} \Rightarrow |x|\sqrt{y}$$

$$\sqrt{x^4 y} = x^2 \sqrt{y}$$

Proprietà invariantiva dei radicali

- **Dato un radicale aritmetico il suo valore non cambia se si moltiplicano o si dividono per uno stesso numero diverso da 0 l'indice della radice e l'esponente del radicando**

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot P]{a^{m \cdot P}} \ oppure \ \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \div P]{a^{m \div P}}$$

riduzione di più radicali allo stesso indice

semplificazione di un radicale

ESEMPI DI SEMPLIFICAZIONE

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \div P]{a^{m \div P}}}$$

Un radicale è riducibile se l'indice e l'esponente hanno un divisore in comune che li possa dividere.

$$\sqrt[4]{64x^8y^2} \Rightarrow \sqrt[4\div 2]{2^{6\div 2}x^{8\div 2}y^{2\div 2}} \Rightarrow \sqrt{8x^4y}(RIDUCIBILE)$$

$$\sqrt[10]{2^5} \Rightarrow \sqrt[10\div 5]{2^{5\div 5}} \Rightarrow \sqrt{2}(RIDUCIBILE)$$

Un radicale è irriducibile quando l'indice e l'esponente non hanno nessun divisore in comune che li possa dividere.

$$\sqrt[7]{2^3 \cdot 5^4} \Rightarrow (\mathrm{IRRIDUCIBILE})$$

$$\sqrt[10]{2^9} \Rightarrow (IRRIDUCIBILE)$$

ESEMPI DI RIDUZIONE

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n*P]{a^{m*P}}$$

Bisogna fare il minimo comune multiplo tra gli indici di ciascun radicale e poi dividere il risultato con l'indice del radicando; la soluzione verrà moltiplicata con l'esponente del radicando.

$$\sqrt[3]{4a^4};\ \sqrt[6]{27a^3};\ \sqrt{a+b} \Rightarrow \sqrt[6]{2^4 a^8};\ \sqrt[6]{3^3 a^3};\ \sqrt[6]{(a+b)^3}$$

$$\sqrt[3]{5};\ \sqrt[4]{10} \Rightarrow \sqrt[12]{5^4};\ \sqrt[12]{10^3}$$

ESEMPI DI RADICANDO POSITIVO

$$\sqrt[\cancel{3}]{a^{\cancel{3}}} = a$$

In questo esempio il risultato è **a**, perché ha l'indice 3 che è un numero dispari e quindi non ha bisogno di valore assoluto

$$\sqrt[\cancel{4}]{a^{\cancel{4}}} = |a|$$

Invece in questi due esempi l'indice è pari e quindi i radicandi hanno bisogno del valore assoluto

$$\cancel{\sqrt{}}(a-b)^{\cancel{2}} = |a-b|$$

ESEMPI CON RADICANDO NEGATIVO

$$\sqrt[4]{-2} = NON\ ESISTE$$

$$\sqrt[6]{-3} = NON\ ESISTE$$

$$\sqrt{-25} = NON\ ESISTE$$

Operazioni con i radicali

- [Moltiplicazione di 2 o più radicali avente lo stesso indice]
- [Divisione di due o più radicali aventi lo stesso indice]
- [Trasporto fuori il segno di radice di 1 o più fattori]
- [Trasporto dentro al segno di radice di 1 o più fattori]
- [Potenza di radicali]
- [Radice di radice]
- [Potenze ad esponente frazionario]
- [Radicali simili]
- [Razionalizzazione]
- [Equazioni]
- [Metodo di Cramer]
- [Radicali doppi]

Moltiplicazione di 2 o più radicali aventi lo stesso indice

Si riduce ad un solo radicale avente il medesimo indice e per radicando il prodotto dei radicandi.

ESEMPI:

$$\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{b}=\sqrt[4]{a\cdot b}$$

$$\sqrt[4]{xy}\cdot\sqrt[4]{\frac{3}{2}x^2}=\sqrt[4]{\frac{3}{2}x^3y}$$

NOTA: se i radicali non hanno lo stesso indice prima di eseguire la moltiplicazione bisogna ridurre tutti i radicali allo stesso indice **(m.c.m.)** e poi eseguire la moltiplicazione.

Divisione di 2 radicali aventi lo stesso indice

Si riduce ad un solo radicale avente il medesimo indice e per radicando il quoziente dei radicandi.

ESEMPIO:

$$\sqrt[4]{a} \div \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$$

NOTA: se i radicali non hanno lo stesso indice prima di eseguire la divisione bisogna ridurre tutti i radicali allo stesso indice **(m.c.m.)** e poi eseguire la divisione.

TRASPORTO FUORI DAL SEGNO DI RADICE DI 1 O PIÙ RADICALI

Questa operazione si può eseguire solo se nel radicando si presentano fattori che hanno esponenti maggiori o uguali all'indice del radicale.

$$\sqrt[3]{8x^6y^2} \Rightarrow \sqrt[3]{2^3x^6y^2} \Rightarrow 2x^2\sqrt[3]{y^2}$$

TRASPORTO DENTRO AL SEGNO DI RADICE DI UNO O PIÚ FATTORI

Uno o più fattori positivi si possono trasportare dentro il segno di radice elevandoli a potenza uguale all' indice.

$$\boxed{a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}}$$

ESEMPI:

$$2x^2\sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{2^3 x^6 y^2}$$

$$-\frac{3}{2}x\sqrt{8xy} \Rightarrow -\sqrt{\frac{3^2}{\cancel{2^2}}x^2 \cdot \cancel{4} \cdot 2\ xy} \Rightarrow -\sqrt{18x^3 y}$$

POTENZA DI RADICALI

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Se vi è un radicando elevato a potenza, bisogna moltiplicare l'esponente del radicando per la potenza.

ESEMPIO:

$$\left(\sqrt[5]{\frac{3}{2}x^2y}\right)^2 \Rightarrow \sqrt[5]{\frac{3^2}{2^2}x^{2\cdot 2}y^{1\cdot 2}} \Rightarrow \sqrt[5]{\frac{9}{4}x^4y^2}$$

RADICE DI RADICE

Per eseguire la radice di un' altra radice si moltiplicano gli indici delle due radici e si scrive il radicando.

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[5]{3x}}} = \sqrt[3\cdot 2\cdot 5]{3x} \Rightarrow \sqrt[30]{3x}$$

POTENZE AD ESPONENTE FRAZIONARIO

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Un radicale si può trasformare a potenza con esponente frazionario moltiplicando l'esponente del radicando per il reciproco dell'indice.

$$\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[6]{\frac{3x^5}{y^2}} = \frac{3^{\frac{1}{6}}\,x^{\frac{5}{6}}}{y^{\frac{2}{6}}}$$

RADICALI SIMILI

L' addizione e la sottrazione si esegue solo con i radicali simili. Due o più radicali si dicono simili se hanno lo stesso radicale e possono differire solo per fattori esterni

$$x\sqrt[3]{y} \quad y\sqrt{x^3} = \text{NON SONO SIMILI}$$

$$3\sqrt{2} \quad 7\sqrt{2} \quad -5\sqrt{2} = \text{SIMILI}$$

$$(3+7-5)\sqrt{2} =$$

$$5\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2} \quad +\sqrt{18} \quad -\sqrt{8} \quad \sqrt{50} =$$

$$\cancel{2\sqrt{2}} \quad +3\sqrt{2} \quad \cancel{-2\sqrt{2}} \quad +5\sqrt{2} =$$

$$(3+5)\sqrt{2} =$$

$$8\sqrt{2}$$

RAZIONALIZZAZIONE

1° CASO:

Se al denominatore c'è una radice quadrata, si moltiplica sia il denominatore che il numeratore per la radice quadrata

$$\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{\vphantom{2}}}(2)^{\cancel{2}}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

2°CASO:

Se al denominatore c'è una radice con indice che va dal 3 in poi, bisogna moltiplicare sia il numeratore che denominatore per un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando quello ottenuto sottraendo l'indice con l'esponente

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a}}=\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\cdot\frac{\sqrt[4]{a^{4-1}}}{\sqrt[4]{a^{4-1}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\cdot\frac{\sqrt[4]{a^{3}}}{\sqrt[4]{a^{3}}}=\frac{\sqrt[4]{a^{3}}}{a}$$

3°CASO:

Se invece al denominatore ci sono due radicali quadratici, bisogna moltiplicare sia il numeratore che il denominatore per il coniugato del denominatore

$$\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}=\frac{3\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{\left(\cancel{\sqrt{2}}\right)^{\cancel{2}}-\left(\cancel{\sqrt{5}}\right)^{\cancel{2}}}=\frac{3\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{2-5}=\frac{\cancel{3}\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{-\cancel{3}}$$

EQUAZIONI

$$\sqrt{2x} = \sqrt{8}$$

$$\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}}x = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{2\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}}$$

$$x = 2$$

$$x + \sqrt{3} = 2\left(x + \sqrt{3}\right)$$

$$x + \sqrt{3} = 2x + 2\sqrt{3}$$

$$x - 2x = -\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$$

$$-x = \sqrt{3}$$

$$x = -\sqrt{3}$$

METODO DI CRAMER

$$\begin{cases} \sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0 \\ x + y = \sqrt{3} - \sqrt{2} \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{2} - \sqrt{3} \qquad Dx = \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} - \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} = 0 - \left(\sqrt{3^2} - \sqrt{6}\right) = -3 + \sqrt{6}$$

$$Dy = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{3} - \sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{6} - \sqrt{2^2} + 0 = \sqrt{6} - 2$$

$$x = \frac{-3+\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{-3\sqrt{2}+\sqrt{18}+\sqrt{12}-3\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{2^2}}-\cancel{\sqrt{3^2}}} = \frac{-\cancel{3\sqrt{2}}-3\sqrt{3}+\cancel{3\sqrt{2}}+2\sqrt{3}}{2-3} = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$$

$$y = \frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{2^2}}-\cancel{\sqrt{3^2}}} = \frac{\cancel{2\sqrt{3}}+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}-\cancel{2\sqrt{3}}}{2-3} = \frac{-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2}$$

RADICALI DOPPI

$\sqrt{a+\sqrt{b}}$ oppure $\sqrt{a-\sqrt{b}}$ $\longrightarrow$ RADICALI DOPPI

Da non confondere con

$\sqrt{a\cdot\sqrt{b}}$ = radice di radice

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

ESEMPI:

$$\sqrt{4+\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{4+\sqrt{16-7}}{2}}+\sqrt{\frac{4-\sqrt{16-7}}{2}}=\sqrt{\frac{4+\sqrt{9}}{2}}+\sqrt{\frac{4-\sqrt{9}}{2}}=\sqrt{\frac{4+3}{2}}+\sqrt{\frac{4-3}{2}}=\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{10-\sqrt{51}}=\sqrt{\frac{10+\sqrt{100-51}}{2}}-\sqrt{\frac{10-\sqrt{100-51}}{2}}=\sqrt{\frac{10+\sqrt{49}}{2}}-\sqrt{\frac{10-\sqrt{49}}{2}}=\sqrt{\frac{10+7}{2}}-\sqrt{\frac{10-7}{2}}=\sqrt{\frac{17}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}$$