Le equazioni

Chiamiamo **equazione** l'uguaglianza tra due espressioni algebriche, funzioni delle stesse variabili, che è verificata solo per particolari valori che vengono attribuiti a tali variabili.
L'espressione che si trova a sinistra del simbolo di uguaglianza si chiama **primo membro**, quella che si trova a destra si chiama **secondo membro**.
Le variabili delle due espressioni si chiamano **incognite**.

ESEMPIO

$$\underbrace{\boxed{2x - 3}}_{\textit{I membro}} = \underbrace{\boxed{x + 1}}_{\textit{II membro}}$$

Incognita: è la lettera x

Termini noti: valori senza la x

Soluzione: è il valore di x che rende vera l'uguaglianza

EQUAZIONI DETERMINATE, INDETERMINATE, IMPOSSIBILI

Un equazione di dominio *D* si dice:

- **determinata** se ha un numero finito di soluzioni in *D*;
- **indeterminata** se ne ha un numero infinito;
- **impossibile** se non ha soluzioni in *D*.

ESEMPI

$$x - 2 = 3$$

L'equazione è ***determinata*** perché ha come sola soluzione 5.

$$1 - 2x = (x - 1)^2 - x^2$$

L'equazione è ***indeterminata*** perché il primo membro è sempre uguale al secondo.

$$x + 4 = x$$

L'equazione è ***impossibile*** perché non esiste un valore di x che sommato a 4 dia ancora x.

CLASSIFICHIAMO LE EQUAZIONI

- **Equazioni numeriche:**
  oltre alla x, non contengono altre lettere

$$1 + x = \frac{2x - 1}{3}$$

- **Equazioni letterali :**
  oltre alla x contengono anche dei parametri

$$ax + 2 = (a - 1)\, x + a$$

- **Equazioni intere:**
  l'incognita non compare al denominatore

$$\frac{x + 1}{3} - \frac{1}{2}x = \frac{2x - 1}{3}$$

- **Equazioni frazionarie:**
  l'incognita si trova in almeno uno dei denominatori

$$\frac{x - 1}{x + 1} - \frac{2x + 3}{4} = 1$$

Due equazioni sono **equivalenti** se hanno le stesse soluzioni.

ESEMPIO

$3x = 6$ e $x + 3 = 5$

Esse sono diverse nella forma, ma entrambe determinate con la stessa soluzione $x = 2$:

$3x = 6$ $\updownarrow$ 2 $3 \cdot 2 = 6$

$x + 3 = 5$ $\updownarrow$ 2 $2 + 3 = 5$

PRIMO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA

Teorema. Se si **aggiunge** ai due membri di un'equazione una stessa espressione algebrica *P*, che ha lo stesso dominio dell'equazione data, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

$$\boxed{A} = \boxed{B}$$

$$\boxed{A} + P = \boxed{B} + P$$

CONSEGUENZE DEL PRIMO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA

Regola del trasporto. Si può spostare un termine da un membro all'altro di un'equazione purché gli si cambi segno.

Di conseguenza una qualunque equazione si può sempre scrivere nella forma $E(x) = 0$, dove $E(x)$ è l'espressione che si ottiene spostando tutti i termini al primo membro.

ESEMPIO

$$2x + 1 = 4 - x$$

$$2x + 1 + x = 4$$

$$2x + 1 + x - 4 = 0$$

Regola di cancellazione. Se nei due membri di un'equazione compaiono due addendi uguali, uno per ogni membro, questi possono essere soppressi.

ESEMPIO

$$2x \cancel{+3} = 5x \cancel{+3}$$

Sono uguali

$$2x = 5x$$

SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA

Teorema. Se si **moltiplicano** i due membri per una stessa espressione P, che abbia lo stesso dominio dell'equazione e che in quel dominio sia sempre diversa da zero, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

$$\boxed{A} = \boxed{B}$$

$$\boxed{A} \bullet P = \boxed{B} \bullet P$$

CONSEGUENZE DEL SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA

Regola di semplificazione. Si possono semplificare tutti i termini di un'equazione per uno stesso fattore comune, purché diverso da zero.

ESEMPIO

$$3x - 6 = 9$$

Tutti i termini sono divisibili per 3.

$$\frac{3x}{3} - \frac{6}{3} = \frac{9}{3}$$

$$x - 2 = 3$$

Regola del cambio dei segni. Se si cambiano i segni a tutti i termini di un'equazione, in entrambi i membri, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

ESEMPIO

$$-2x - 3 = x - 1$$

$$\Downarrow$$

$$2x + 3 = -x + 1$$

Regola della riduzione a coefficienti interi. Da un'equazione a coefficienti frazionari si può passare ad un'equazione a coefficienti interi moltiplicando entrambi i membri per il *m.c.m.* fra i denominatori di tutte le frazioni.

ESEMPIO

$$\frac{1}{3}x + 1 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{6} \qquad m.c.m.\ (3, 2, 6) = 6$$

$$6\left(\frac{2x+6}{6}\right) = \left(\frac{3x-1}{6}\right)6$$

$$2x + 6 = 3x - 1$$

LE EQUAZIONI LINEARI

Un'equazione di primo grado si dice anche **lineare** ed ha la forma:

$$ax + b = 0$$

Termine noto

a è il coefficiente del termine di primo grado, *b* è il termine noto dell'equazione.
Il dominio di un'equazione lineare è sempre *R*.

Possiamo dire di avere risolto un'equazione lineare quando riusciamo a scriverla nella forma

$$x = k$$

In questo caso diciamo che k è la soluzione e che $S=\{k\}$ è l'insieme delle soluzioni.

PROCEDURA DI RISOLUZIONE

Data l'equazione $ax + b = 0$

Si porta il termine noto al secondo membro $ax = -b$

Si analizza il coefficiente *a*

$a \neq 0$

$$x = -\frac{b}{a}$$

$$\boxed{S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}}$$

$a = 0$

$b = 0$

Indeterminata
$S = R$

$b \neq 0$

Impossibile
$S = \emptyset$