Un'**espressione algebrica letterale** è un'espressione nella quale alcuni numeri sono rappresentati da lettere.

ESEMPI

$$\frac{2a + 10b}{2} - 5 \qquad \frac{abx^2}{y} \qquad \frac{3a + 1}{a + 1} + 5$$

L'insieme dei valori che si possono attribuire alle lettere dipende dalle operazioni indicate nell'espressione; non si possono attribuire alle lettere valori numerici che rendono impossibile eseguire le operazioni indicate.

ESEMPIO

$$\frac{x + 2y}{a}$$

x e y possono assumere qualsiasi valore

ma a deve essere $\neq 0$

Un **monomio** è un’espressione algebrica letterale nella quale:

- gli esponenti delle lettere sono solo numeri naturali
- fra le lettere ci sono solo operazioni di moltiplicazione

ESEMPI

$2ab^2$ è un monomio

$4x - 2y$ $\qquad \dfrac{2b^4}{a}$ non sono monomi

Diciamo che un monomio è scritto in **forma normale** se è il prodotto di un coefficiente numerico per una o più lettere, ciascuna con il proprio esponente e tutte diverse tra loro.

ESEMPI

$3b^2y^3$ è in forma normale

$3b^2y^3b$ non è in forma normale

In un monomio in forma normale si distinguono sempre **coefficiente** e **parte letterale**; se il coefficiente è uguale a 1, in genere viene omesso.

$$\underset{\text{coefficiente}}{-3}\ \underbrace{x^2y}_{\text{parte letterale}} \qquad \qquad \underbrace{a^2b^3}_{\text{parte letterale}}$$

coefficiente 1

Monomio nullo: monomio con coefficiente uguale a 0

si indica con 0

Monomi simili: monomi con parte letterale uguale

ESEMPI

Sono monomi simili $-5ay$ e $4ay$; $-5az^4y^2$ e $\frac{2}{5}z^4ay^2$ (vale la proprietà commutativa della moltiplicazione)

Monomi opposti: monomi simili con coefficienti opposti

ESEMPIO

$8a^2b$ e $-8a^2b$

Grado complessivo di un monomio: somma dei gradi delle lettere che vi compaiono

ESEMPIO

$3x^2y$ ha grado: $1 + 2 = 3$

Grado rispetto a una lettera: l'esponente con cui quella lettera compare nel monomio (in forma normale)

ESEMPIO

$3x^2y$ ha grado 2 rispetto alla x e 1 rispetto alla y

La **somma di due monomi simili** è un monomio simile a quelli dati il cui coefficiente numerico è la somma algebrica dei coefficienti dei due monomi.

ESEMPIO

$$-2b^2y^5 + 12b^2y^5 = (-2 + 12)b^2y^5 = 10b^2y^5$$

Se i monomi non sono simili, la somma non si può esprimere come un unico monomio.

ESEMPIO

$$\left(+\frac{1}{2}ab\right) + \left(+\frac{3}{4}x^2\right) = \frac{1}{2}ab + \frac{3}{4}x^2$$

Per sottrarre due monomi si somma il primo con l'opposto del secondo.

ESEMPI

$$-(3x^4) - (+2x^4) = -3x^4 + (-2x^4) = -3x^4 - 2x^4 = -5x^4$$

$$(+2a^3y) - (-6ax) = 2a^3y + (+6ax) = 2a^3y + 6ax$$

ADDIZIONE di monomi

SOTTRAZIONE di monomi

SOMMA ALGEBRICA di monomi

Il **prodotto di due monomi** è il monomio che ha come coefficiente numerico il prodotto dei coefficienti dei due monomi dati e la cui parte letterale si ottiene sommando gli esponenti delle lettere uguali.

ESEMPIO

$$(+3a^3x^2) \bullet (+7abx^3) = +\,3 \bullet 7 \bullet (a^3 \bullet a) \bullet b \bullet (x^2 \bullet x^3) = 21a^4bx^5$$

Per elevare **a potenza** un monomio si eleva a quella potenza il coefficiente numerico e si moltiplicano per *n* gli esponenti della parte letterale.

ESEMPIO

$$\left(-\frac{1}{2}x^2y^3\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 (x^2)^3\,(y^3)^3 = -\frac{1}{8}x^{2\bullet 3} \bullet y^{3\bullet 3}$$

Dati due monomi *A* e *B*, con $B \neq 0$, si dice loro **quoziente** il monomio *C*, se esiste, che moltiplicato per *B* dà il monomio *A*.

ESEMPI

differenza degli esponenti

$$8x^3y^2 : \left(-\frac{2}{3}xy\right) = -12x^2y$$

quoziente dei coefficienti

Il 1° monomio è <u>divisibile</u> per il 2°

$$-\frac{6}{5}a^2xy^2 : \left(\frac{3}{4}ax^2y\right)$$

Il quoziente non è un monomio perché il grado di *x* nel divisore è maggiore del grado di *x* nel dividendo.

Il massimo comun divisore tra due o più monomi (*M.C.D.*) è il monomio di grado più alto che li divide tutti.

Per calcolare il *M.C.D.*:

- Si calcola l'*M.C.D.* dei coefficienti se sono interi e si pone uguale a 1 negli altri casi (il segno è sempre positivo).
- Si calcola il prodotto dei fattori comuni ai monomi dati, presi una sola volta con il minimo esponente.

ESEMPI

$$M.C.D.\ \left(9a^2b^2\ ;\ 3a^2b^4c^2\ ;\ 12a^2b^2\right) = 3a^2b^2$$

$$M.C.D.\ \left(\frac{1}{3}x^2y\ ;\ -\frac{7}{2}x^3y^3\ ;\ 2x^2y^3z\right) = x^2y$$

Il minimo comune multiplo tra due o più monomi (*m.c.m.*) è il monomio di grado minimo che è multiplo di tutti.

Per calcolare il *m.c.m.*:

- Si calcola il *m.c.m.* dei coefficienti se sono interi e si pone uguale a 1 negli altri casi (il segno è sempre positivo)
- Si calcola il prodotto di tutti i fattori, comuni e non comuni, presi una sola volta con il massimo esponente.

ESEMPI

$$m.c.m.\ \left(9a^2b^2\ ;\ 3a^2b^4c^2\ ;\ 12a^6b^2\right) = 36a^6b^4c^2$$

$$m.c.m.\ \left(\frac{1}{3}x^2y\ ;\ -\frac{7}{2}x^3y^3\ ;\ 2x^2y^3z\right) = x^3y^3z$$

Un **polinomio** è la somma algebrica di più monomi.

ESEMPIO

La somma algebrica $3xy + ab + 2$ è un polinomio costituito da tre termini.

L'ultimo, data l'assenza della parte letterale, è detto **termine noto**.

Polinomio in forma normale: polinomio in cui non ci sono monomi simili.

ESEMPI

$3xy + 4ab - 5xy + 6ab$ non è in forma normale

$-2xy + 10ab$ è in forma normale

Grado complessivo di un polinomio: il massimo fra i gradi dei monomi che lo compongono

Grado rispetto a una sua lettera: il massimo grado con cui essa compare nel polinomio

Polinomio omogeneo: polinomio in cui i termini hanno tutti lo stesso grado

ESEMPI

$$2x^2y + \frac{1}{2}x^3y^2 + 6$$

Grado complessivo: 5

Grado rispetto alla x: 3

Grado rispetto alla y: 2

$$3x^2y - 4x^3 + 2y^3$$

È un polinomio omogeneo di grado 3

Polinomio ordinato secondo le potenze decrescenti (o crescenti) di una lettera: polinomio i cui termini sono scritti in modo che le potenze di quella lettera si susseguano in modo decrescente (o crescente).

Polinomio completo rispetto a una lettera: polinomio in cui la lettera compare con tutte le potenze (dalla più grande a 0).

ESEMPI

$$+\frac{1}{2}a^2b + \frac{1}{2}ab^2 + a^3$$

È omogeneo e completo rispetto alla lettera *b*, non è ordinato.

$$2x^2y + \frac{1}{2}x^3y^2 + 6$$

Non è omogeneo, non è ordinato, è completo rispetto a *y*.

$$3x^3y + 2x^2 + x + 6$$

È ordinato e completo rispetto a *x* ma non è omogeneo.

Un polinomio è funzione delle lettere che vi compaiono.

ESEMPIO

$P(x) = 3x^2 - 2x + 1$ $\quad P(0) = 1 \quad P(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 9$

$Q(a, b) = a^2b - 5ab + 4a^3$ $\quad Q(1, -2) = 1^2 \cdot (-2) - 5 \cdot 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 1^3 = 12$

Principio di identità dei polinomi. Due polinomi, funzioni delle stesse lettere, sono identici se assumono valori uguali in corrispondenza degli stessi valori attribuiti alle lettere.

Ciò accade se i polinomi, ridotti a forma normale, hanno i termini uguali a due a due.

ESEMPIO

$P(x) = x^2 - 2x + 3 \qquad Q(x) = ax^2 - 2x + 3 \qquad R(x) = x^2 + bx + 3$

Sono identici se e solo se $a = 1$ e $b = -2$

Monomi e Polinomi

Per **addizionare** due polinomi si sommano tutti i monomi che li formano riducendo quelli simili.

Per **sottrarre** due polinomi si somma il primo con l'opposto del secondo.

ESEMPIO

$$(3x^2 + 2ab + xy) + (3ab + xy) - (2x^2 + 1) =$$

$$(3x^2 + 2ab + xy) + (3ab + xy) + (-2x^2 - 1) =$$

$$(3x^2 - 2x^2) + (2ab + 3ab) + (xy + xy) - 1 =$$

$$x^2 + 5ab + 2xy - 1$$

Il **prodotto fra polinomi** si esegue applicando la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione:

ESEMPIO

$$(3x - b)\,(1 + 2x) = 3x + 6x^2 - b - 2bx$$

Il **quoziente fra un polinomio e un monomio** si esegue, quando possibile, dividendo ciascun termine del polinomio per il monomio divisore e sommando i quozienti ottenuti:

ESEMPIO

$$(9x^2y - 18xy^2 + 2xy) : (-3xy) =$$

$$= (9x^2y) : (-3xy) + (-18xy^2) : (-3xy) + (2xy) : (-3xy) =$$

$$= -3x + 6y - \frac{2}{3}$$

Il calcolo di alcuni prodotti fra polinomi si può abbreviare tenendo conto di particolari regole:

QUADRATO DI UN BINOMIO:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

ESEMPIO

$$\left(\frac{1}{2}ab + x\right)^2 = \left(\frac{1}{2}ab\right)^2 + 2 \bullet \frac{1}{2}ab \bullet x + (x)^2 = \frac{1}{4}a^2b^2 + abx + x^2$$

$$\left(\frac{3}{2}x^2 - y\right)^2 = \left(\frac{3}{2}x^2\right)^2 + 2 \bullet \frac{3}{2}x^2 \bullet (-y) + (-y)^2 = \frac{9}{4}x^4 - 3x^2y + y^2$$

QUADRATO DI UN TRINOMIO: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

ESEMPI

$(2x + y + z)^2 =$

$= (2x)^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot 2x \cdot y + 2 \cdot 2x \cdot z + 2 \cdot y \cdot z =$

$= 4x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4xz + 2yz$

$(a - 3b + 1)^2 =$

$= a^2 + (-3b)^2 + 1^2 + 2 \cdot a \cdot (-3b) + 2 \cdot a \cdot 1 + 2(-3b) \cdot 1 =$

$= a^2 + 9b^2 + 1 - 6ab + 2a - 6b$

SOMMA DI DUE MONOMI PER LA LORO DIFFERENZA: $(a + b) \bullet (a - b) = a^2 - b^2$

ESEMPIO

$$\left(\frac{1}{2}a^2 - b^2\right) \bullet \left(\frac{1}{2}a^2 + b^2\right) = \frac{1}{4}a^4 - b^4$$

$$(-x + 2y) \bullet (-x - 2y) = x^2 - 4y^2$$

CUBO DI UN BINOMIO: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

ESEMPIO

$(3a - x)^3 =$

$= (3a)^3 + (-x)^3 + 3 \bullet (3a)^2 \bullet (-x) + 3 \bullet (3a) \bullet (-x)^2 =$

$= 27a^3 - x^3 - 27a^2x + 9ax^2$

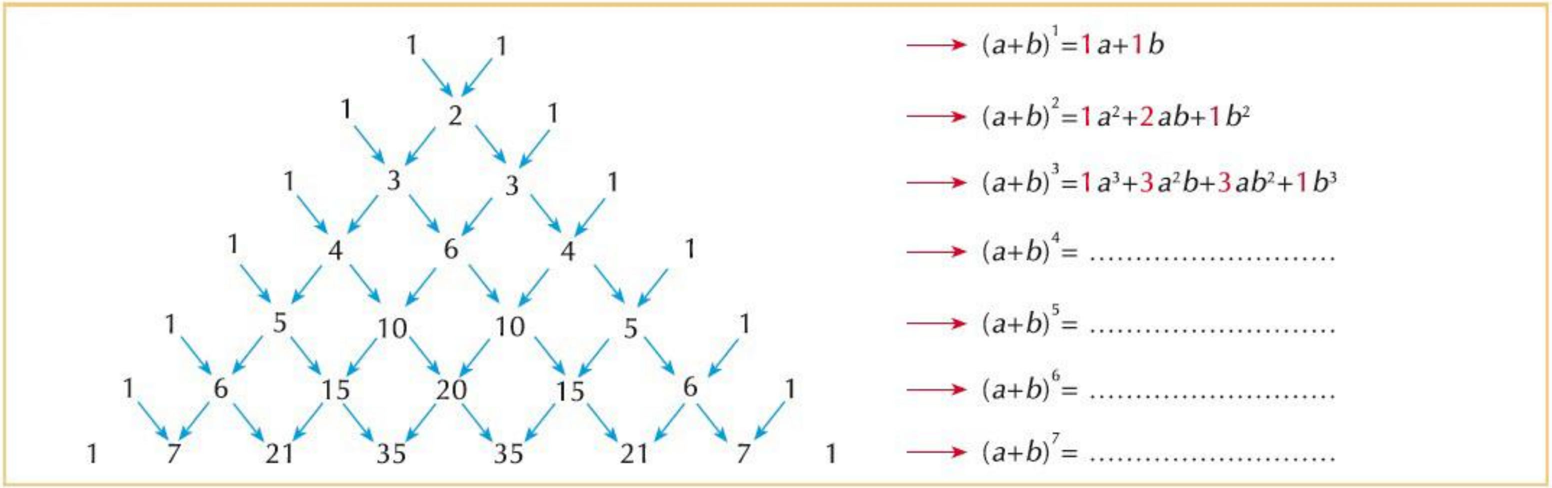
$(-a - 2b)^3 =$

$= (-a)^3 + (-2b)^3 + 3 \bullet (-a)^2 \bullet (-2b) + 3 \bullet (-a) \bullet (-2b)^2 =$

$= -a^3 - 8b^3 - 6a^2b - 12ab^2$

TRIANGOLO DI TARTAGLIA

Esprime i coefficienti dello sviluppo della potenza di un binomio:



ESEMPIO

$(a + 2)^5 =$

$= 1 \bullet a^5 + 5 \bullet 2a^4 + 10 \bullet 4a^3 + 10 \bullet 8a^2 + 5 \bullet 16a + 1 \bullet 32 =$

$= a^5 + 10a^4 + 40a^3 + 80a^2 + 80a + 32$

La divisione tra polinomi si esegue con un procedimento analogo a quello della divisione tra due numeri.

Calcoliamo: $(7x + 8x^2 + 2) : (2x + 3)$

1° passo. Ordiniamo i polinomi secondo le potenze decrescenti di x e costruiamo lo schema della divisione:

$$\begin{array}{l|l} 8x^2 + 7x + 2 & 2x + 3 \\ \cline{2-2} & \\ & \end{array}$$

2° passo. Dividiamo $8x^2$ per $2x$ e riportiamo il risultato sotto il divisore.

$$\begin{array}{l|l} 8x^2 + 7x + 2 & 2x + 3 \\ \cline{2-2} & 4x \\ & \end{array}$$

3° passo. Moltiplichiamo il primo quoziente parziale $4x$ per il polinomio divisore e sottraiamo dal polinomio dividendo, incolonnando, i termini di ugual grado.

$$\begin{array}{r|l} 8x^2 + 7x + 2 & 2x + 3 \\ \cline{2-2} -8x^2 - 12x & 4x \\ \cline{1-1} -5x - 2 & \end{array}$$

4° passo. Abbiamo ottenuto $-5x + 2$ (1° resto parziale). Tale resto ha grado maggiore o uguale a quello del divisore: si possono ripetere i passi ricominciando dal primo.

$$\begin{array}{r|l} 8x^2 + 7x + 2 & 2x + 3 \\ \cline{2-2} -8x^2 - 12x & 4x - \dfrac{5}{2} \quad \text{Q(x): quoziente} \\ \cline{1-1} -5x + 2 & \\ +5x + \dfrac{15}{2} & \\ \cline{1-1} \dfrac{19}{2} & \quad \text{R: resto} \end{array}$$

Le divisioni di un polinomio $P(x)$ per un binomio di primo grado della forma $(x - a)$ hanno un particolare rilievo; per esse valgono i seguenti teoremi.

- **Teorema del resto**: il resto della divisione di $P(x)$ per $(x - a)$ è uguale a $P(a)$.

$P(x) = x^3 - 2x^2 + 4$ divisore: $x - 1$ resto: $P(1) = 3$

- **Teorema di Ruffini**: un polinomio $P(x)$ è divisibile per il binomio $(x - a)$ se e solo se $P(a) = 0$

In questo caso a rappresenta uno zero del polinomio.

Il teorema di Ruffini rappresenta quindi un criterio di divisibilità di $P(x)$ per $(x - a)$.

La divisione tra $P(x)$ e $(x – a)$ si può eseguire come divisione tra polinomi o con la regola di **Ruffini**.

Calcoliamo: $(3x^2 - 2x + 5) : (x - 2)$

coefficienti del polinomio

		+ 3	− 2	+ 5
valore di ***a***	+ 2		+ 6	+ 8
		+ 3	+ 4	+ 13
				resto

1° passo. Si scrivono i coefficienti di $P(x)$ su una stessa riga, ordinati secondo le potenze decrescenti della variabile x, ricordando di scrivere 0 come coefficiente dei termini mancanti se il polinomio è incompleto.

2° passo. Dopo aver scritto il valore di a (cioè +2), si scrive in basso il primo coefficiente (cioè +3).

3° passo. Si moltiplica il valore di a per il coefficiente del termine che abbiamo appena riportato nell'ultima riga e si scrive il risultato nella colonna successiva (cioè 2 • 3 = 6).

4° passo. Si sommano gli ultimi valori incolonnati e si scrive il risultato nell'ultima riga (cioè − 2 + 6 = 4).

5° passo. Si ripetono i passi 3 e 4 fino a che si esaurisce lo schema.