Sistemi lineari

I sistemi di equazioni di I grado

Diamo la seguente definizione:

Un **sistema di equazioni** è un insieme di due o più equazioni, tutte nelle stesse incognite, di cui cerchiamo soluzioni comuni.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -18 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

L'**insieme delle soluzioni** di un sistema è formato da quei valori delle incognite che soddisfano **tutte** le equazioni che compongono il sistema.

Il grado di un sistema di equazioni è il prodotto dei gradi delle singole equazioni che vi figurano perciò un sistema si dirà di primo grado se tutte le equazioni in esso presenti sono di primo grado

IMPARAREMO A RISOLVERE SISTEMI DI PRIMO GRADO ESSI SI CHIAMANO ANCHE

sistemi lineari

Prenderemo in considerazione sistemi di due equazioni in due incognite

Un sistema lineare ,ridotto a forma normale, si presenta così:

$$\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ a_1 x + b_1 y = c_1 \end{cases}$$

Attento: le incognite sono x e y le altre lettere che compaiono sono costanti!

COME MAI SI CHIAMANO LINEARI?

Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

Esso è di primo grado poiché le sue equazioni sono entrambe di primo grado nelle incognite x e y .

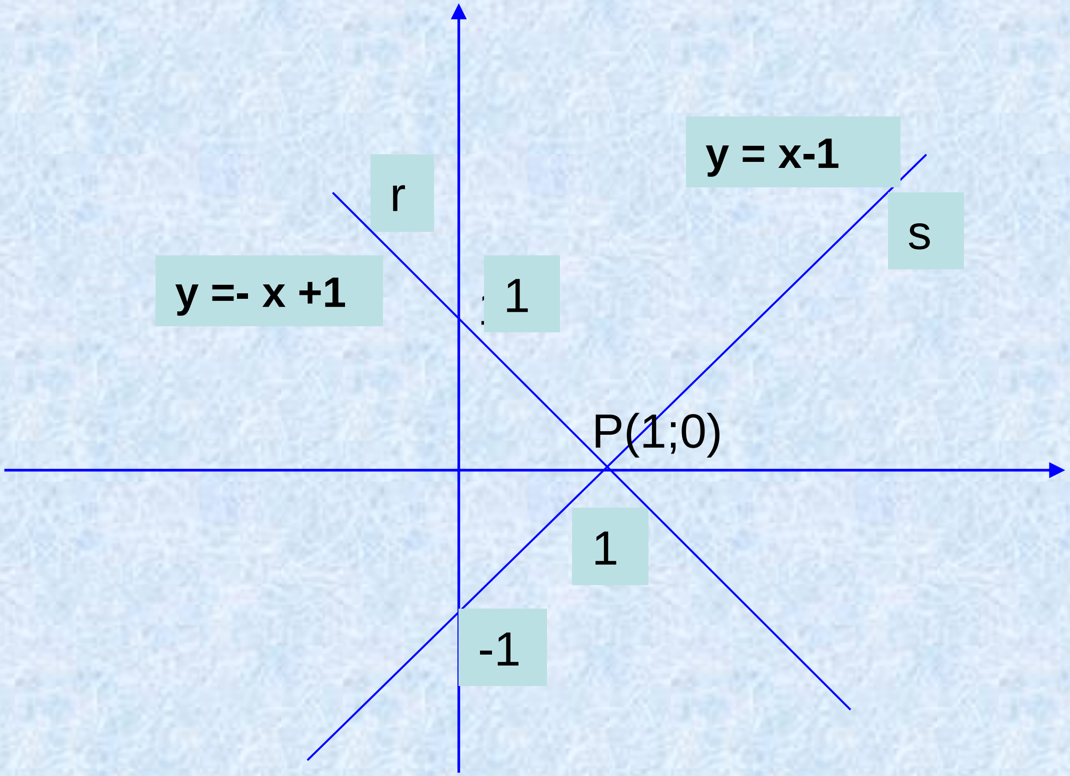
Ciascuna delle due equazioni nel piano cartesiano rappresenta una retta

(anche se non hai ancora affrontato l' argomento puoi capirlo facilmente)

Disegniamo nel piano cartesiano le due rette : se esse sono incidenti il punto comune sarà la soluzione del sistema cioè le sue coordinate x e y sono la coppia di numeri soluzione del sistema.

Tracciamo le due rette che rappresentano graficamente le equazioni:

s: y = x – 1 e r: *y = -x + 1*



Per la retta s: y = x -1

Determiniamo due punti:

x	y
0	-1
1	0

Per la retta r: y = - x +1

x	y
0	1
1	0

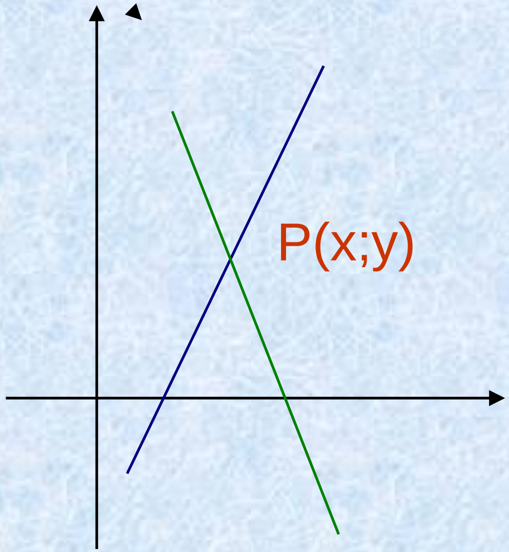
Il punto P(1 ; 0) è la soluzione grafica del nostro sistema

Quante soluzioni ha un sistema di questo tipo?

Un sistema può avere:

- ***Una soluzione (x ; y) e in tal caso si dice determinato;***
- ***Nessuna soluzione e in tal caso si dice impossibile;***
- ***Infinite soluzioni e in tal caso si dice indeterminato***

Una soluzione si ha quando le rette che rappresentano le equazioni del sistema sono incidenti



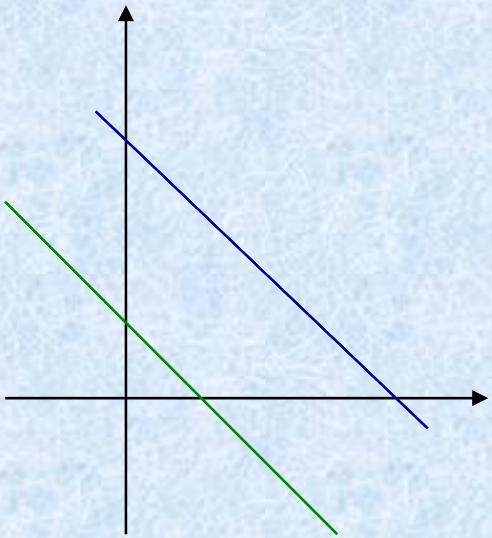
1 punto in comune

Il sistema ha

Una sola soluzione P(x ; y)

commento

Nessuna soluzione se le rette che rappresentano le equazioni del sistema sono parallele e distinte



Nessun punto in comune

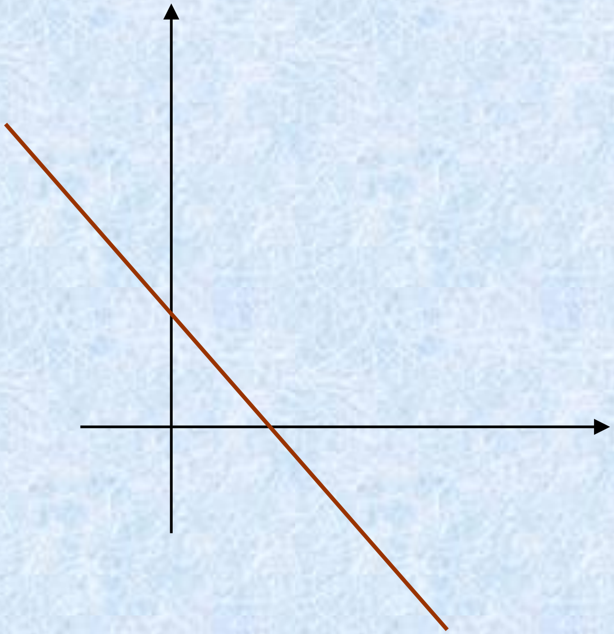
Il sistema

Non ha soluzione;

Il sistema è

IMPOSSIBILE

Infinite soluzioni se le rette sono parallele e coincidenti



Infiniti punti in comune

Il sistema ha

Infinite soluzioni;

Il sistema è

INDETERMINATO

A cosa servono i sistemi lineari ?

Molti sono i problemi di varia natura che possono essere risolti utilizzando i sistemi lineari.

Consideriamo il seguente...

Problema:

Un Hotel possiede camere con vista mare ad un costo di 120 euro a notte e camere standard ad un costo di 100 euro a notte. Quando l’ albergo è al completo, in un solo giorno, l’ incasso è di 10400 euro. Sapendo che l’ albergo ha100 camere in tutto, quante camere con vista ci sono?

risoluzione

Costruiamo un modello che rappresenti il problema:

chiamiamo x il numero di camere con vista e y quello delle camere standard; poiché in tutto sono 100 deve risultare :

- 1) $x + y = 100$

inoltre l' incasso di una notte per tutte le camere deve essere 10400 euro perciò:

- 2) $120x+100y= 10400$

le due condizioni devono valere entrambe quindi occorre risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x+y=100 \\ 120x+100y=10400 \end{cases}$$

Per la risoluzione di questo sistema ci sono diversi metodi (noi lo risolviamo con il metodo di sostituzione)

Metodi algebrici per risolvere un sistema lineare

Metodo di **sostituzione**

Metodo del **confronto**

Metodo di riduzione o di **eliminazione**

METODO Di **CRAMER**

METODO DEL CONFRONTO

Questo metodo consiste nell' esplicitare entrambe le equazioni rispetto alla stessa incognita così da potere uguagliare i secondi membri .Vediamo un esempio:

$$\begin{cases} 4x - y = 5 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{y+5}{4} \\ x = -2y + 8 \end{cases}$$

Poiché i primi membri sono uguali devono esserlo anche i secondi membri, perciò scriviamo e risolviamo l'equazione:

$$\frac{y+5}{4} = -2y + 8 \Rightarrow y + 5 = -8y + 32$$

$$9y = 27 \Rightarrow y = 3$$

Sostituiamo:

$$x = -2(3) + 8 \Rightarrow x = 2$$

Metodo di sostituzione

•Risolviamo il sistema precedente con il metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} x+y=+100 \\ 120x+100y=10400 \end{cases}$$

•Isoliamo da una qualunque delle due equazioni un'incognita a piacere, nell'esempio nella prima equazione abbiamo isolato la x

$$\begin{cases} x=100-y \\ 120x+100y=10400 \end{cases}$$

•Sostituiamo nell'altra equazione l' espressione trovata e calcoliamo il valore della y

$$\begin{cases} x=100-y \\ 120(100-y)+100y=10400 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=100-y \\ 12000-120y+100y=10400 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=100-y \\ 20y=1600 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=100-y \\ y=80 \end{cases}$$

•Una volta calcolato il valore di *y* lo sostituiremo di nuovo nell'equazione esplicitata in *x*

$$\begin{cases} x=20 \\ y=80 \end{cases}$$

risposta

Nell’ albergo ci sono 20 camere con vista mare e le altre 80 sono standard

Ancora un esempio:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -18 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 4y = -18 \\ x = -2y + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(-2y + 4) - 4y = -18 \\ x = -2y + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = -2y + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = -2(3) + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

- Il sistema è già ridotto a forma normale
- Isoliamo, da una qualunque delle due equazioni, un'incognita a piacere (nell'esempio, isoliamo la x dalla seconda equazione)
- Sostituiamo nell'altra equazione la espressione (-2y+4);
- risolviamo rispetto all'incognita y
- Infine, sostituiamo il valore di y nell'altra equazione.

Soluzione: (-2, 3)

SISTEMA IMPOSSIBILE

Facciamo un esempio di sistema impossibile

$$\begin{cases} 8x - 6y = 1 \\ 4x - 3y = -12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x - 6y = 1 \\ x = \dfrac{3y - 12}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8\left(\dfrac{3y - 12}{4}\right) - 6y = 1 \\ x = \dfrac{3y - 12}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0y = 25 \\ x = \dfrac{3y - 12}{4} \end{cases}$$

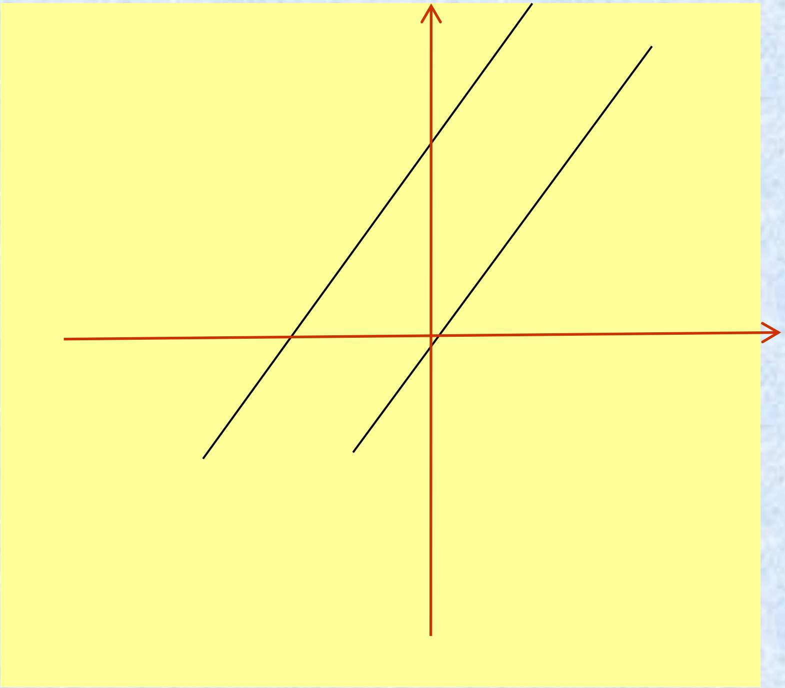
Equazione impossibile!

Sistema Impossibile

commento

RISOLUZIONE GRAFICA
(Sistema impossibile)

$$\begin{cases} 8x - 6y = 1 \\ 4x - 3y = -12 \end{cases}$$



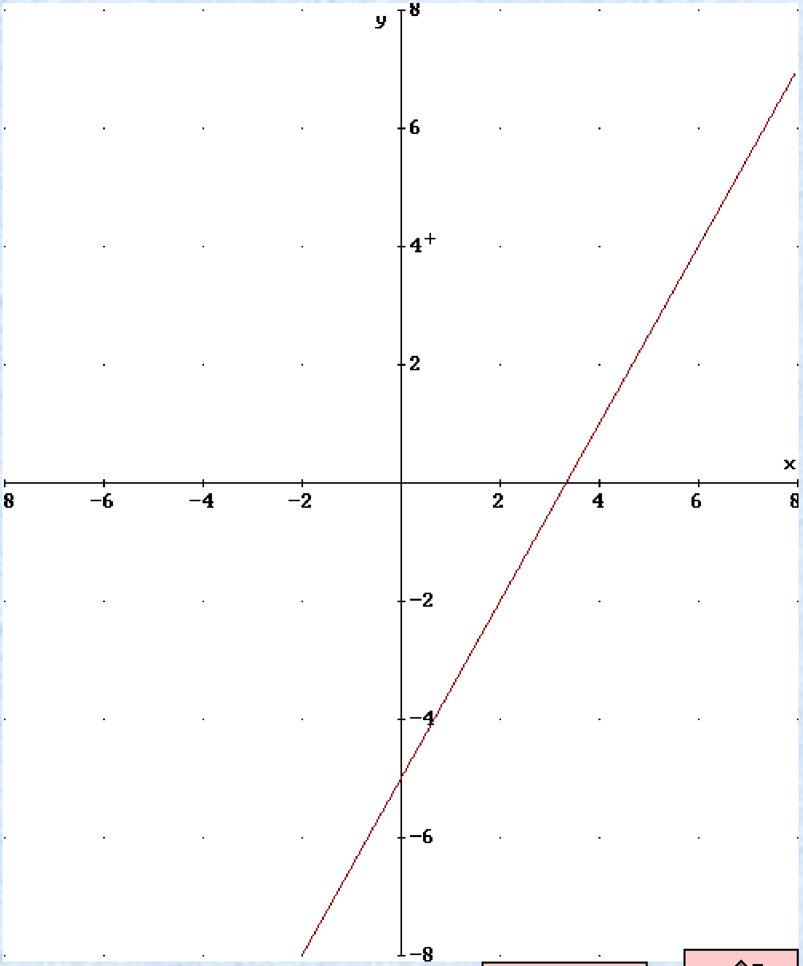
SISTEMA INDETERMINATO

$$\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ 6x - 4y = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{2y+10}{3} \\ 6\left(\dfrac{2y+10}{3}\right) - 4y = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{2y+10}{3} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Equazione indeterminata!



Sistema Indeterminato

Ritorna ad altri metodi

METODO DI RIDUZIONE O ELIMINAZIONE

Questo metodo si applica quando i coefficienti di una delle incognite sono uguali o opposti. Se non lo sono bisogna prima renderli uguali o opposti.

Il metodo consiste nell'addizionare o sottrarre membro a membro le equazioni del sistema.

Precisamente:

Se i coefficienti dell'incognita da eliminare sono uguali si sottraggono membro a membro le due equazioni;

Se tali coefficienti sono opposti si sommano membro a membro le due equazioni.

$$\begin{cases} 3x+2y=11 \\ 3x-y=8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x+2y=11 \\ 3x-y=8 \end{cases}$$

$$\overline{//\,3y=3} \quad sottraggo$$

$$y=1$$

Ripetiamo moltiplicando per 2 la seconda

$$\begin{cases} 3x+2y=11 \\ 6x-2y=16 \end{cases}$$

$$\overline{9x\,//=27} \quad sommo$$

$$x=3 \rightarrow$$

$$\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Secondo esempio del metodo di eliminazione

Se i coefficienti dell'incognita non sono né uguali né opposti bisogna renderli uguali o opposti, nell' esempio seguente la seconda equazione viene moltiplicata per 2 (in generale si fa in modo da rendere i coefficienti uguali scegliendo il mcm tra i coefficienti dati)

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 2 \cdot x + 3y = 9 \end{cases} \Rightarrow$$

sottraggo

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 2x + 6y = 18 \end{cases}$$

$$-7y = -14$$

Invece di ripetere il procedimento sostituisco il valore trovato in una delle due equazioni date

$$\begin{cases} y = 2 \\ x + 3(2) = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Ritorna ad altri metodi

METODO DI CRAMER

Consideriamo il sistema in forma normale:

$$\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ a_1 x + b_1 y = c_1 \end{cases}$$

Si chiama determinante del sistema e si indica con Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a \cdot b_1 - a_1 \cdot b$$

Se il $\Delta \neq 0$ il sistema è determinato e procediamo al calcolo di altri due determinanti .

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} = c \cdot b_1 - bc_1$$

e

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} = a \cdot c_1 - c \cdot a_1$$

La soluzione del sistema è:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$$

e

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

Facciamo un esempio:

Questo metodo è molto semplice e conviene applicarlo soprattutto se i coefficienti del sistema sono numeri grandi e i calcoli si presentano laboriosi.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2) - 3(5) = -4 - 15 = -19$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 8(-2) - 3(1) = -16 - 3 = -19$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 40 = -38$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-19}{-19} = 1$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-38}{-19} = 2$$

Ritorna ad altri metodi