I PRODOTTI NOTEVOLI

LA SOMMA DI DUE MONOMI PER LA LORO DIFFERENZA

IL QUADRATO DI UN BINOMIO

IL QUADRATO DI UN TRINOMIO

IL CUBO DI UN BINOMIO

IL CUBO DI UN TRINOMIO

LA POTENZA DI UN BINOMIO (TARTAGLIA)

LA SOMMA DI DUE MONOMI PER LA LORO DIFFERENZA

Definizione:

La somma di due monomi per la loro differenza è uguale al quadrato del primo termine meno il quadrato del secondo termine.

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

Infatti, se si effettua il prodotto senza applicare la regola si ottiene:

$$(a+b)\cdot(a-b)=$$

e semplificando i monomi simili:

$$=a^2-\cancel{ab}+\cancel{ab}-b^2=$$

$$=a^2-b^2$$

Esempi:

$$(2a+3b)\cdot(2a-3b)=$$

$$=(2a)^2-(3b)^2=4a^2-9b^2$$

$$\left(\frac{1}{2}m-\frac{3}{5}n\right)\cdot\left(\frac{1}{2}m+\frac{3}{5}n\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}m\right)^2-\left(\frac{3}{5}n\right)^2=\frac{1}{4}m^2-\frac{9}{25}n^2$$

Test di verifica:

VERO o FALSO?

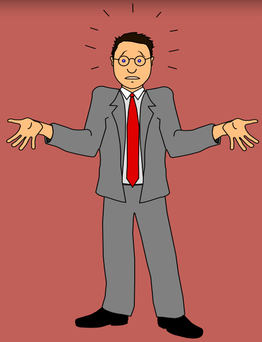
$$(3x+y)\cdot(3x-y)=9x^2-y^2$$ **VERO**

$$(5x^2+y)\cdot(5x^2-y)=25x^4-y^2$$ **VERO**

$$(2m-3n^2)\cdot(2m+3n^2)=4m^2\cancel{+}9n^4$$ **FALSO**

$$\left(\frac{1}{2}a-4b\right)\cdot\left(\frac{1}{2}a+4b\right)=\frac{1}{4}a^2-8b^2$$ **FALSO**

Verifica:



Risolvi i seguenti esercizi:

1°: $$\left(5a^2+3ab\right)\cdot\left(5a^2-3ab\right)=$$

2°: $$\left(\frac{1}{3}x^3+2x^2y\right)\cdot\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2y\right)=$$

3°: $$(1+3m)\cdot(1-3m)=$$

I risultati sono:

1°: $\Rightarrow$ $25a^4 - 9a^2b^2$

2°: $\Rightarrow$ $\frac{1}{9}x^6 - 4x^4y^2$

3°: $\Rightarrow$ $1 - 9m^2$

Il QUADRATO DI UN BINOMIO

Definizione:

Il quadrato di un binomio è uguale al quadrato del primo monomio, più o meno il doppio prodotto del primo per il secondo, più il quadrato del secondo.

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Infatti, se si esegue la moltiplicazione senza applicare la regola si ottiene:

$$(a+b)^2 =$$

$$=(a+b)\cdot(a+b)= \quad a^2 + \underline{ab} + \underline{ab} + b^2 =$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 =$$

$$=(a-b)\cdot(a-b)= \quad a^2 - \underline{ab} - \underline{ab} + b^2 =$$

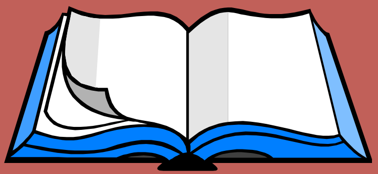
$$= a^2 - 2ab + b^2$$

Esempi:

$$(x+2y)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 2y + (2y)^2 =$$

$$= x^2 + 4xy + 4y^2$$

$$\left(\frac{1}{2} - m\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot(-m) + (-m)^2 =$$



Esempi:

$$(2a+b)^2 = 4a^2 + 4ab + b^2$$

$$(x-3y)^2 = x^2 - 6xy + 9y^2$$

$$(m^2+n)^2 = m^4 + 2m^2n + n^2$$

Test di verifica:

VERO o FALSO ?

$$(2m+3n)^2 = 4m^2 + \overset{12}{\cancel{6}}mn + 9n^2$$

FALSO

$$\left(\frac{1}{2}x - y^2\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 - xy^2 + y^4$$

VERO

IL QUADRATO DI UN TRINOMIO

Definizione:

Il quadrato di un trinomio è uguale alla somma dei quadrati dei tre termini, più o meno il doppio prodotto di ognuno di essi per tutti quelli che lo seguono.

$$(a+b+c)^2 =$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Infatti, se si esegue l'operazione ignorando la regola , si ha:

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)\cdot(a+b+c) =$$

$$= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + \underline{bc} + ac + \underline{bc} + c^2 =$$

ed eseguendo la somma dei monomi simili

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Esempi:

$$(3a-2b+c)^2=$$

$$=9a^2+4b^2+c^2-12ab+6ac-4bc$$

$$(a+2b-c)^2=$$

$$=a^2+4b^2+c^2+4ab-2ac-4bc$$

Altri Esempi :

$$\left(3x^3+2x^2+x\right)^2=$$

$$=9x^6+4x^4+x^2+12x^5+6x^4+4x^3$$

$$\left(1-x+2y\right)^2=$$

$$=1+x^2+4y^2-2x+4y-4xy$$

Test di verifica :

VERO o FALSO?

1°: $$\left(1-2a+3a^2\right)^2=$$

$$=1+4a^2+9a^4-4a+6a^2-12a^3$$

VERO

2°: $$\left(5x-2x^2+y\right)^2=$$

$$=25x^2+4x^4+y^2-20x^3-10xy-4x^2y$$

FALSO

IL CUBO DI UN BINOMIO

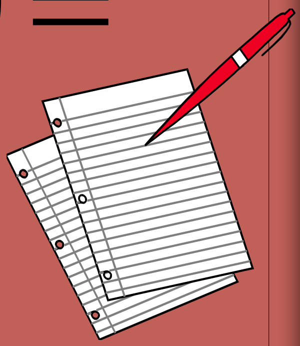
Definizione :

Il cubo di un binomio è uguale al cubo del primo termine, più o meno il triplo prodotto del quadrato del primo per il secondo, più il triplo prodotto del primo per il quadrato del secondo, più o meno il cubo del secondo.

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

Infatti, moltiplicando per se stesso tre volte

$$(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)=$$



si ha

$$=(a+b)^2\cdot(a+b)=$$

$$=\left(a^2+2ab+b^2\right)\cdot(a+b)=$$

ossia :

$$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$$

e sommando i monomi simili si ha:

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Esempi:

$$(2a+3b)^3 = 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$$

$$(x-3y)^3 = x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3$$

$$(m^2+n)^3 = m^6 + 3m^4n + 3m^2n^2 + n^3$$

Esempi (continua):

$$(3a-b)^3 =$$

$$=(3a)^3-3\cdot(3a)^2\cdot b+3\cdot 3a\cdot b^2-b^3=$$

$$=27a^3-3\cdot 9a^2\cdot b+3\cdot 3a\cdot b^2-b^3=$$

$$=27a^3-27a^2b+9ab^2-b^3$$

Test di verifica:

VERO o FALSO ?

VERO

$$\left(2m-3\right)^3 = 8m^3 - 36m^2 + 54m - 27$$

$$\left(1-a\right)^3 = 1 \cancel{+} 3a + 3a^2 - a^3$$

FALSO

$$\left(3x+\frac{1}{2}y\right)^3 = 27x^3 + \frac{27}{2}x^2y + \frac{9}{4}xy^2 + \frac{1}{8}y^3$$

VERO

IL CUBO DI UN TRINOMIO

$$(a+b+c)^3 =$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 +$$

$$+ 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc.$$

Definizione:

Il cubo di un polinomio è dato dal polinomio che ha per termini:

1°) i cubi di tutti i termini;

2°) i tripli prodotti dei quadrati di ciascuno dei termini per ognuno degli altri;

3°) i sestupli dei prodotti a tre a tre.

Esempio:

$$(2a-3b+1)^3=(2a)^3+(-3b)^3+(+1)^3+$$

$$+3(+2a)^2(-3b)+3(2a)^2(+1)+$$

$$+3(-3b)^2(+2a)+3(-3b)^2(+1)+$$

Segue esempio:

$$+3(+1)^2(+2a)+3(+1)^2(-3b)+$$

$$+6(+2a)(-3b)(+1)=$$

$$=8a^3-27b^3+1-36a^2b+12a^2+$$

$$+54ab^2+9b^2+6a-9b-36ab$$

LA POTENZA DI UN BINOMIO (TARTAGLIA)

Definizione:

Lo sviluppo di $(a+b)^n$, con n intero e positivo, è un polinomio di n-esimo grado rispetto ad a e b, decrescente rispetto ad a e crescente rispetto a b, i cui monomi hanno per coefficienti i valori che si ottengono nel triangolo di Tartaglia, presi sulla n-esima riga e con i segni tutti positivi se si tratta di somma, alterni se si ha una differenza .

Quando è usato?

E' usato per calcolare potenze di espressioni binomie del tipo:

$$(a+b)^4; \qquad (2x-1)^5;$$

$$(x+2)^6; \qquad (x \pm y)^n;$$

La storia.

Niccolò Fontana (Brescia1500-Venezia1557), matematico italiano. Fontana venne soprannominato "Tartaglia" per via della balbuzie che lo colse da quando, nel 1512, ancora ragazzo, venne ferito al viso da un soldato francese durante l'invasione della sua città natale.

(Continua)

(continua):

Fu autodidatta ed esercitò sempre altre professioni unitamente all'insegnamento . Scrisse, tra le altre cose, trattati di **balistica** e fu uno degli scopritori della soluzione dell'**equazione** di terzo grado .Tartaglia è ricordato soprattutto per aver formulato la regola algebrica conosciuta come **"triangolo di Tartaglia"**.

Triangolo di Tartaglia

$$(x+y)^4 =$$

1 1

1 + 2 + 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 1

Esempi:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(2x-1)^5 =$$

$$= (2x)^5 - 5(2x)^4 + 10(2x)^3 - 10(2x)^2 + 5(2x) - 1 =$$

$$= 32x^5 - 5 \cdot 16x^4 + 10 \cdot 8x^3 - 10 \cdot 4x^2 + 5 \cdot 2x - 1 =$$

$$= 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1$$

Altri Esempi

$$(x+2)^6 =$$

$$= x^6 + 6\cdot x\cdot^5 2 + 15\cdot x^4\cdot 2^2 + 20\cdot x^3\cdot 2^3 +$$

$$+ 15\cdot x^2\cdot 2^4 + 6\cdot x\cdot 2^5 + 2^6 =$$

$$= x^6 + 12x^5 + 80x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$$

Test di verifica:

VERO o FALSO ?

$$(1-a)^4 = 1-4a\cancel{-}6a^2-4a^3\cancel{-}a^4$$

FALSO

$$(a-1)^4 = a^4-4a^3+6a^2-4a+1$$

VERO

$$(x-y)^5 =$$

$$= x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5$$

VERO

F I N E