

Identità ed equazioni

Consideriamo l'uguaglianza espressa dalla seguente frase:

Trova un numero | tale che | il suo doppio | sommato | con se stesso | sia uguale | al suo triplo.

$$x \quad \rightarrow \quad 2x \quad + \quad x \quad = \quad 3x$$

La relazione: $2x + x = 3x$ è vera per qualunque valore assegnato alla lettera x

DEFINIZIONE. Si dice **identità** un'uguaglianza di due espressioni (di cui almeno una letterale) che è verificata da qualunque valore attribuito alla lettera o alle lettere che vi figurano.

Consideriamo l'uguaglianza espressa dalla seguente frase:

Trova un numero | tale che | il suo doppio | sommato | con se stesso | sia uguale | a 21.

$$x \quad \rightarrow \quad 2x \quad + \quad x \quad = \quad 21$$

La relazione: $2x + x = 21$ è verificata solamente se $x = +7$

DEFINIZIONE. Si dice **equazione** un'uguaglianza di due espressioni (di cui almeno una letterale) verificata solo da particolari valori attribuiti alla lettera o alle lettere che vi figurano.

Le equazioni

In un'equazione generica si possono distinguere:

The diagram shows the equation $8x^3 + 5x^2 = 4x + 1$. A red box labeled "Simbolo di uguaglianza" has a red arrow pointing down to the equals sign. Two red boxes, labeled "I membro" and "II membro", have red arrows pointing up to the left and right sides of the equation respectively.

Le due espressioni letterali sono separate dal segno di uguaglianza

- La lettera che figura nell'equazione si dice **incognita**.
- I termini che non contengono un'incognita si dicono **termini noti**.
- Il **grado** di un'equazione è dato dal grado del monomio di grado massimo.
- I valori che rendono vera l'equazione si chiamano **soluzioni** o **radici dell'equazione**.
- Un'equazione è definita a **termini interi** quando vi figurano solo coefficienti o termini noti interi; a **termini frazionari** quando vi compaiono coefficienti o termini noti frazionari.

Equazioni equivalenti

Consideriamo le seguenti equazioni:

$$x + 4x = 15$$

$$2x + 1 = x + 4$$

Esse hanno la stessa soluzione: $x = 3$

Per questo motivo vengono dette **equazioni equivalenti**.

DEFINIZIONE. Due equazioni si dicono **equivalenti** quando hanno le stesse soluzioni.

Il primo principio di equivalenza

ESEMPIO

Consideriamo l'equazione $4x + 5 = 17$ che ha come soluzione $x = 3$

Addizioniamo +4 ad entrambi i membri

$$4x + 5 + 4 = 17 + 4$$

Otteniamo $4x + 9 = 21$ che ha ancora soluzione $x = 3$

PRIMO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA. Addizionando o sottraendo ai due membri di un'equazione una stessa espressione algebrica letterale (o uno stesso numero) otteniamo un'equazione equivalente a quella data.

Il primo principio di equivalenza

Legge del trasporto

ESEMPIO

Consideriamo l'equazione $x - 2 = 18$

Applicando il primo principio di equivalenza addizionando ad entrambi i membri +2

$$x - \cancel{2} + \cancel{2} = 18 + 2$$

$$x = 18 + 2$$

Confrontando la prima equazione con l'ultima osserviamo che il termine -2 della prima equazione è passato al secondo membro della seconda con il segno cambiato.

REGOLA. In ogni equazione un termine può essere trasportato da un membro all'altro purché lo si cambi di segno.

Il primo principio di equivalenza

La soppressione di termini uguali

ESEMPIO

Consideriamo l'equazione $3x - 20 = x + 4 - 20$

Applichiamo il primo principio addizionando ad entrambi i membri +20

$$3x - \cancel{20} + \cancel{20} = x + 4 - \cancel{20} + \cancel{20}$$

da cui

$$3x = x + 4$$

REGOLA. Se in entrambi i membri di un'equazione figurano due termini uguali, essi possono essere soppressi.

Il secondo principio di equivalenza

ESEMPIO

Consideriamo l'equazione $6x + 2 = 14$ che ha come soluzione $x = 2$

Moltiplichiamo entrambi i membri per +3 $+3 \cdot (6x + 2) = +3 \cdot 14$

Otteniamo $18x + 6 = 42$ che ha come soluzione $x = 2$

Analogamente se dividiamo entrambi i membri per +2

$$(6x + 2) : (+2) = 14 : (+2)$$

Otteniamo $3x + 1 = 7$ che ha come soluzione $x = 2$

SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA. Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di un'equazione per uno stesso numero (diverso da zero) otteniamo un'equazione equivalente a quella data.

Il secondo principio di equivalenza

Il cambiamento dei segni

ESEMPIO

Consideriamo l'equazione $-2x + 1 = -5$

Moltiplichiamo entrambi i membri per -1

$$(-1) \cdot (-2x + 1) = (-1) \cdot (-5)$$

Otteniamo $+2x - 1 = 5$

REGOLA. Cambiando il segno ad ogni termine di un'equazione otteniamo un'equazione equivalente a quella data.

Il secondo principio di equivalenza

La riduzione di un' equazione a forma intera

ESEMPIO

Consideriamo l' equazione

$$\frac{2}{3} + \frac{2x}{5} = \frac{1}{3} + x$$

Moltiplichiamo ogni termine dell' equazione con il m.c.m. dei denominatori (cioè 15).

$$\cancel{15}^5 \times \frac{2}{\cancel{3}_1} + \cancel{15}^3 \times \frac{2x}{\cancel{5}_1} = \cancel{15}^5 \times \frac{1}{\cancel{3}_1} + 15 \times x$$

$$10 + 6x = 5 + 15x$$

Quest' ultima equazione si dice **ridotta a forma intera** ed è equivalente a quella data.

REGOLA. Un'equazione che contiene termini frazionari può essere ridotta a forma intera moltiplicando tutti i suoi termini per il *m.c.m.* di tutti i denominatori.

La risoluzione di un'equazione di primo grado ad una incognita

DEFINIZIONE. Un'equazione scritta nella forma $ax = b$ si dice in **forma normale**.

ESEMPIO

Consideriamo l'equazione:

$$8x = 16$$

Applichiamo il secondo principio dividendo entrambi i membri per +8

$$\frac{8x}{8} = \frac{16}{8} \quad \text{da cui} \quad x = 2$$

REGOLA. Per risolvere un'equazione ridotta in forma normale basta dividere entrambi i membri dell'equazione per il coefficiente della x .

Se l'equazione non è ridotta in forma normale bisogna applicare opportunamente i principi di equivalenza in modo da ridurre l'equazione in forma normale.

Casi particolari

I caso $a \neq 0$ e $b \neq 0$

REGOLA. Data l'equazione ridotta in forma normale $ax = b$, se a e b sono entrambi diversi da 0, allora l'equazione è **determinata** e la soluzione è:

$$x = \frac{b}{a}$$

ESEMPIO

$$7x = 12 \qquad x = \frac{12}{7}$$

Il caso $a \neq 0$ e $b = 0$

REGOLA. Data l'equazione ridotta in forma normale $ax = b$, se $a \neq 0$ e $b = 0$, allora l'equazione è **determinata** e la soluzione è $x = 0$.

ESEMPIO

$$8x = 0 \qquad x = \frac{0}{8} = 0$$

Casi particolari

III caso $a = 0$ e $b \neq 0$

REGOLA. Data l'equazione ridotta in forma normale $ax = b$, se $a = 0$ e $b \neq 0$, allora non esiste una soluzione accettabile e l'equazione è detta **impossibile**.

ESEMPIO

$$0x = 10$$

La soluzione non esiste.

IV caso $a = 0$ e $b = 0$

REGOLA. Data l'equazione ridotta in forma normale $ax = b$, se $a = 0$ e $b = 0$, allora esistono infiniti valori di x che la soddisfano e l'equazione è detta **indeterminata**.

ESEMPIO

$$0x = 0$$

Indeterminata

La risoluzione di particolari equazioni di secondo grado

I caso equazione mancante di termini di primo grado

REGOLA. Data l'equazione $ax^2 = b$, se $a \neq 0$, allora $x^2 = \frac{b}{a}$ cioè $x = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$

ESEMPIO

$$3x^2 - 45 = -6x^2 + 36$$

Risolviamola come se fosse di primo grado:

$$3x^2 + 6x^2 = 36 + 45 \longrightarrow 9x^2 = 81 \longrightarrow x^2 = \frac{81}{9} \longrightarrow x^2 = 9$$

$$\longrightarrow x = \pm \sqrt{9} = \pm 3$$

La risoluzione di particolari equazioni di secondo grado

Il caso Equazione data come prodotto di due polinomi di primo grado

REGOLA. Data l'equazione $(x \pm a) \cdot (x \pm b) = 0$ per la legge di annullamento del prodotto si ha

$$x \pm a = 0 \longrightarrow x = \mp a$$

$$x \pm b = 0 \longrightarrow x = \mp b$$

ESEMPIO

$$(x - 5) \cdot (x + 4) = 0$$

L'equazione data è uguale a 0 se e solo se: $x - 5 = 0$ oppure $x + 4 = 0$

cioè se $x = 5$ oppure $x = -4$

La risoluzione algebrica di problemi

Le fasi da seguire per risolvere un problema per via algebrica, ovvero mediante l'uso di un'equazione, sono le seguenti:

- lettura e comprensione del testo con l'obiettivo di identificare i dati;
- scelta dell'incognita;
- impostazione dell'equazione risolutiva;
- risoluzione dell'equazione;
- eventuale accettabilità delle soluzioni.

Le disequazioni

Consideriamo le scritture $x < \frac{1}{5}$ $5x > 3$ $x + 2 > 3 + 2x$

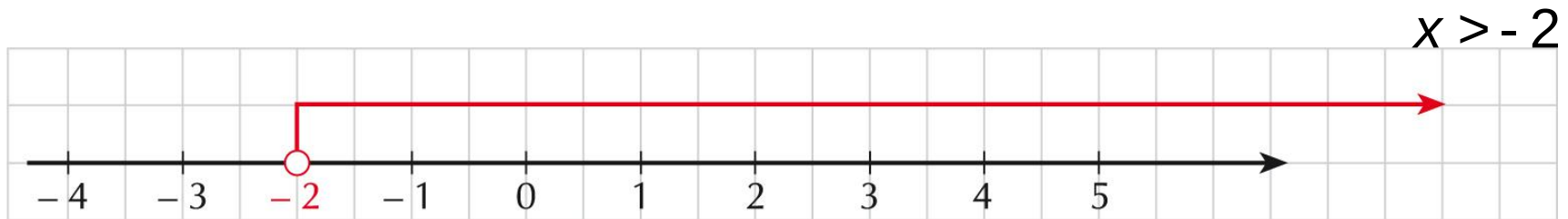
Esse sono disuguaglianze, ma poiché contengono lettere incognite vengono dette disequazioni.

DEFINIZIONE. Una **disequazione** è una disuguaglianza di due espressioni verificata solo da particolari valori attribuiti alle incognite. I valori che rendono vera la disuguaglianza si dicono **soluzioni** o **radici** della disequazione.

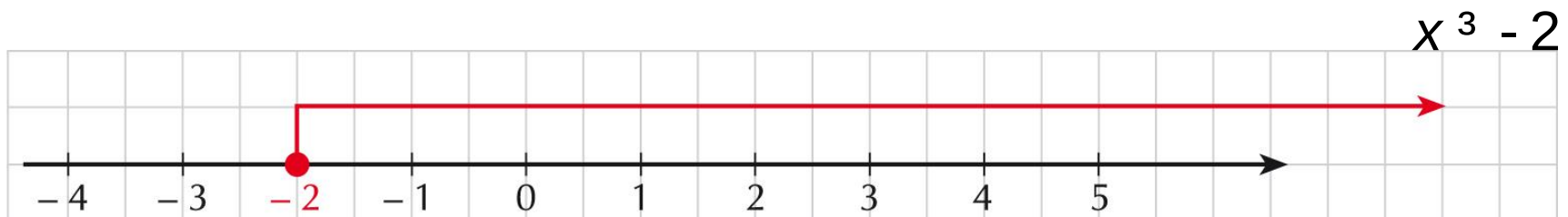
DEFINIZIONE. Due disequazioni si dicono **equivalenti** quando hanno lo stesso insieme di soluzioni.

Le disequazioni

È possibile rappresentare graficamente l'insieme delle soluzioni di una disequazione su una retta orientata. Adottiamo la convenzione di utilizzare un pallino vuoto nel caso in cui il valore limite non faccia parte dell'insieme soluzione.



Se il valore limite fa parte dell'insieme soluzione usiamo un pallino pieno.



Il primo principio di equivalenza

REGOLA. Addizionando o sottraendo ad entrambi i membri di una disequazione una stessa espressione algebrica (o uno stesso numero) si ottiene una disequazione equivalente a quella data.

Conseguenze del primo principio di equivalenza

REGOLA. In ogni disequazione un termine può essere trasportato da un membro all'altro purché lo si cambi di segno (**Legge del trasporto**).

ESEMPIO

$$3x + 1 < 10 \quad \rightarrow \quad 3x < 10 - 1$$

REGOLA. Se in entrambi i membri di una disequazione figurano due termini uguali, essi possono essere soppressi (**Soppressione dei termini uguali**).

ESEMPIO

La disequazione $15 + 2x > 8 + 15$ è equivalente a $2x > 8$

Il secondo principio di equivalenza

REGOLA. Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una disequazione per **uno stesso numero positivo** otteniamo una disequazione equivalente a quella data.

REGOLA. Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una disequazione per **uno stesso numero negativo** otteniamo una disequazione equivalente a quella data in cui il **verso è opposto** e i **termini hanno il segno cambiato**.

ESEMPIO

$$-x > -4$$

Moltiplicando i membri per -1

$$x < 4$$

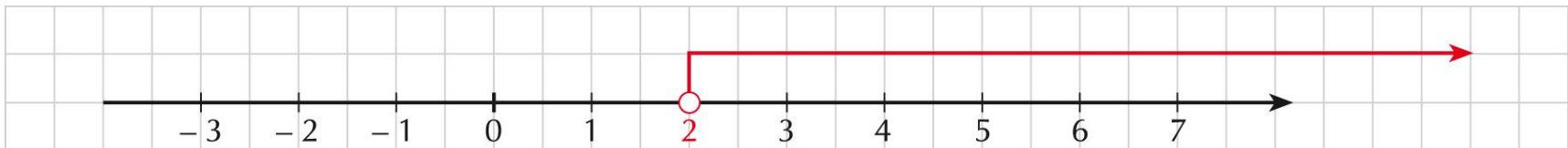
Risoluzione di una disequazione di primo grado ad una incognita

ESEMPIO

Risolviamo la seguente disequazione $5x - 10 > 0$

$$5x > 10 \quad \rightarrow \quad x > \frac{10}{5} \quad \rightarrow \quad x > 2$$

L'insieme di tutte le soluzioni S è dato da tutti i numeri reali maggiori di 2.



Risoluzione di una disequazione di primo grado ad una incognita

REGOLA. Per risolvere una disequazione di primo grado ad una incognita occorre sviluppare le seguenti fasi:

- a) si riduce la disequazione a forma intera;
- b) si eliminano eventuali parentesi, eseguendo le operazioni indicate;
- c) si trasportano i termini che contengono l'incognita al primo membro e i termini noti al secondo membro;
- d) si riduce la disequazione in forma normale;
- e) se il **coefficiente della x non è positivo**, si rende tale moltiplicando per -1 tutta la disequazione (**cambiando** perciò sia **tutti i segni** sia il **verso** della disequazione);
- f) si trova l'insieme delle soluzioni.